

# مابکراهای دن و درسام

پرای ۲۰ گزفتن

## دسایان

درسامه | نمونه سوال | امتحان

مصطفی دیداری



## مجموع جمله‌های دنباله حسابی و هندسی

سلام بچه‌ها، می‌بینم که همه شار و پراثری هستید. اولین درس حسابان رو شروع می‌کنیم. در جریان دنباله‌های حسابی که هستید؟ تو درس امروز می‌فایم جمع تعدادی جمله از دنباله حسابی و هندسی رو به دست بیاریم.

### پله اول: یادآوری دنباله حسابی

دنباله اعداد که یادتان هست؟ هر تعداد عدد که پشت سر هم بنویسیم یک دنباله ایجاد می‌شود؛ مثل  $1, 4, 9, 16, \dots$  به قانون یا الگویی که جمله‌های دنباله توسط آن تولید می‌شوند، جمله عمومی گفته می‌شود. حالا چرا جمله عمومی؟ چون اگر آن را داشته باشید با جای گذاری شماره جمله به جای  $n$ ، جمله‌ها (عموم جمله‌ها) به دست می‌آیند، مثلاً جمله عمومی دنباله‌ای که گفتیم  $a_n = n^2$  است. جمله چهارم می‌شود  $a_4 = 4^2 = 16$ ، جمله بیستم  $a_{20} = 20^2 = 400$ . حالا یک دنباله حسابی بگویید، مثلاً  $4, 7, 10, 13, \dots$  در این دنباله، هر جمله با عدد ثابت  $+3$  (عموم قدرنسبت فودمون) جمع شده و عدد بعدی به دست می‌آید. در دنباله‌های حسابی هر جمله با عدد ثابت مثبت یا منفی  $d$  (قدرنسبت) جمع شده و عدد بعدی به دست می‌آید. به زبان دیگر اختلاف هر دو جمله متوالی، برابر عدد ثابت  $d$  است؛ یعنی  $a_n - a_{n-1} = d$ . جمله عمومی دنباله حسابی؛ برای نوشتن جمله عمومی دنباله حسابی دو چیز می‌خواهید: یکی جمله اول ( $a_1$ ) و دیگری قدرنسبت ( $d$ ). با جای گذاری این دو تا در قانون  $a_n = a_1 + (n-1)d$  جمله عمومی به دست می‌آید.

### مثال پاسخ

مثال دنباله  $3, 1, 5, 9, \dots$  را در نظر بگیرید:

الف) جمله عمومی آن را بنویسید.

ب) جمله سی و سوم دنباله، کدام است؟ جمله چندم برابر ۳۳ است؟

پاسخ

الف) جمله اول که تابلو  $a_1 = -3$  است. قدرنسبت هم  $d = 4$  (پهارتا پهارتا داره اضافه می‌شه) است. با جای گذاری در فرمول جمله عمومی داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -3 + (n-1)(4) = 4n - 7$$

$$a_{33} = 4(33) - 7 = 125$$

$$4n - 7 = 33 \Rightarrow n = 10$$

ب) جمله سی و سوم، پس  $n = 33$  می‌گذاریم:

گفته جمله چندم، پس  $n$  یا همان شماره جمله، مجهول است:

یعنی دهمین عدد در دنباله برابر ۳۳ است.

## پله دوم: چند نکته تکمیلی در مورد دنباله‌های حسابی

چند نکته مهم در هر دنباله حسابی وجود دارد. خیالتان راحت باشد، سؤال مستقیم از این‌ها نمی‌آید ولی خوب، در لابه‌لای حل مسئله‌های امسال، ممکن است به آن‌ها نیاز پیدا کنید.

۱) اگر  $a, b, c$  سه جمله متوالی دنباله حسابی باشند، جمله وسط، میانگین دو جمله کناری است؛ یعنی  $\frac{a+c}{2} = b$ .

۲) جمله عمومی دنباله حسابی نسبت به  $n$  خطی (درجه حداکثر یک) است؛ مثلاً به صورت  $a_n = 2n + 3$  یا  $a_n = \frac{n}{3} - 1$ . پس اگر دنباله‌ای مثل

$a_n = (k-2)n^2 + kn + 1$  حسابی باشد باید کاری کنید که  $n^2$  از بین برود؛  $k-2$  را برابر صفر قرار دهید تا  $k=2$  و در نتیجه  $a_n = 2n + 1$  به دست آید.

۳) می‌خواهیم بین دو عدد  $b$  و  $a$  تعداد  $n$  عدد (واسطه) طوری قرار دهیم که همه اعداد، تشکیل یک دنباله حسابی بدهند. مثلاً می‌خواهیم بین دو عدد ۴ و ۸۱ تعداد ۶ واسطه حسابی قرار دهیم. به دو روش می‌توانیم این کار را انجام دهیم:

**روش اول:** با استفاده از فرمول  $d = \frac{b-a}{n+1} = \frac{81-4}{7} = 11$  (تعداد واسطه‌ها) + ۱ =  $\frac{b-a}{n+1}$  قدرنسبت به دست می‌آید. حالا داریم:

$$4, \boxed{15}, \boxed{26}, \boxed{37}, \boxed{48}, \boxed{59}, \boxed{70}, 81$$

**روش دوم:** جمله اول که ۴ است. ۶ تا واسطه هم داریم؛ پس عدد ۸۱، جمله هشتم است. با فرمول جمله عمومی داریم:

$$a_8 = 81 \Rightarrow a_1 + 7d = 81 \Rightarrow 4 + 7d = 81 \Rightarrow d = 11$$

## پله سوم: مجموع $n$ جمله اول دنباله حسابی

می‌خواهیم مجموع جمله‌های اول تا  $n$ ام دنباله حسابی را به دست آوریم. قبل از این که به فرمول اصلی برسیم، جمع اعداد متوالی از ۱ تا  $n$  یعنی  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  را به دست می‌آوریم:

**مرحله اول**  $S = 1 + 2 + \dots + n \Rightarrow$  جمع اعداد را  $S$  می‌نامیم

**مرحله دوم**  $S = n + (n-1) + \dots + 1 \Rightarrow$  همین اعداد را از آخر به اول می‌نویسیم

**مرحله سوم** (یکی بیشتر از آخری) (آخری)  $\Rightarrow 2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ تا}} \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$

مثلاً:  $1 + 2 + \dots + 50 = \frac{50 \times 51}{2} = 1275$  یا  $1 + 2 + \dots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$

حالا مجموع  $n$  جمله اول دنباله حسابی را به دست می‌آوریم:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$= na_1 + \underbrace{(1+2+3+\dots+(n-1))}_{\text{فرمول جمع اعداد متوالی}} d = na_1 + \frac{(n-1)(n)}{2} d = \frac{2na_1 + (n-1)(n)d}{2} = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

بنابراین به خاطر می‌سپاریم که:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

حالا بگویید بینم معنی  $S_1$  چیست؟ جمع جمله‌های اول تا دهم. معنی  $S_2$  (توجه به فردا فهمیدیم) ... حواستان باشد برای یافتن مجموع تعدادی جمله، باید جمله اول و قدرنسبت را داشته باشید (اگر نداشتید چی؟ فب اول باید اون‌ها رو با اطلاعات مسئله پیدا کنید؛ بعد بنده‌زید تو فرمول). کتاب درسی یک رابطه

غیر ضروری دیگر هم برای  $S_n$  گفته است: میانگین اولی و آخری  $\times$  تعداد  $= S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

## مثال پاسخ

مثال دنباله حسابی  $\dots, 7, 2, -3$  را در نظر بگیرید:

الف) مجموع ۲۰ جمله اول دنباله را به دست آورید.

ب) مجموع  $n$  جمله اول (همون  $S_n$ ) را بیابید.

پ) مجموع  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  را به دست آورید.

ت) مجموع  $a_2 + a_3 + \dots + a_n$  را بیابید.

پاسخ

الف)  $a_1 = -3$  و  $d = 5$  است، پس:  $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2(-3) + 19(5)) = 890$

ب) جمع جمله‌های اول تا بیستم، برابر  $890$  شد اما برای محاسبه  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  باید جمع جمله‌های اول تا دهم

(یعنی  $S_{10}$ ) را از آن کم کنیم:  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n - S_{10} = 890 - \frac{10}{2}(2(-3) + 9(5)) = 695$

به جمع  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  مجموع ده جمله دوم هم می‌گوییم (آله بانی دیربر و مشت کنید!). جمع بندی (الف) و (ب) این شد که برای جمع، از یک تا  $n$  فرمول داریم. اگر آن وسط‌ها، جمعی را خواستید باید  $S_n$  را از قبلی‌ها کم کنید.

پ)  $S_n = \frac{n}{2}(2(-3) + (n-1)(5)) = \frac{n}{2}(5n - 11) = \frac{5n^2}{2} - \frac{11}{2}n$

بد نیست بدانید دنباله مجموع  $(S_n)$  همواره از درجه حداکثر ۲ (نه بیشتر!) درمی‌آید.

ت) جمع تعدادی جمله شماره زوج را می‌خواهیم، به  $a_2, a_4, a_6, \dots$  و ... دقت کنید:  $-3, 2, 7, 12, 17, 22, \dots$

خودشان یک دنباله حسابی با قدرنسبت  $2 \times 5 = 10$  هستند. مجموع ده‌تا از این جمله‌ها را می‌خواهیم:

$a_2 + a_4 + \dots + a_{20} = \frac{10}{2}(2(2) + 9(10)) = 470$

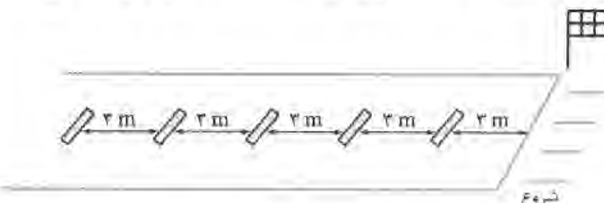
مثال: مجموع دوازده جمله اول دنباله حسابی برابر  $138$  و جمله ششم آن برابر  $10$  است. مجموع صد جمله اول دنباله را بیابید.

پاسخ: گفتیم تا  $a_1$  و  $d$  را نداشته باشیم کاری نمی‌توانیم بکنیم، پس اول آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} S_{12} = 138 &\Rightarrow \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = 138 && \begin{cases} 12a_1 + 66d = 138 \\ a_1 + 5.5d = 11 \end{cases} \\ a_6 = 10 &\Rightarrow a_1 + 5d = 10 && \times (-12) \begin{cases} 12a_1 + 66d = 138 \\ -12a_1 - 66d = -132 \end{cases} \\ &&& \hline &&& 6d = 18 \Rightarrow d = 3 \Rightarrow a_1 = -5 \end{aligned}$$

حالا  $S_{100} = 50(-10 + 99(3)) = 14350$

مثال: یادش بخیر! یکی از امتحان‌های ورزش ما به این صورت بود.  $5$  چوب به فاصله  $3$  متری در یک خط مستقیم قرار داده می‌شد.



هر فرد باید از نقطه شروع حرکت کرده، چوب اول را برداشته و دوباره برگشته و در مکان شروع قرار می‌داد. برای چوب‌های بعدی هم همین‌طور (کم‌تر از زمان مشخصی این کار رو انجام می‌دادیم نمره کامل می‌گرفتیم). بعله برای  $20$  ورزش هم بهمان را درمی‌آوردن، شما محاسبه کنید برای برداشتن همه چوب‌ها چه مسافتی طی می‌شود؟

پاسخ: برای برداشتن چوب اول  $3$  متر جلو و  $3$  متر هم برمی‌گردیم؛ پس در کل  $6$  متر را طی می‌کنیم. برای برداشتن چوب دوم

$6$  متر می‌رویم و  $6$  متر برمی‌گردیم؛ پس  $12$  متر. به همین ترتیب برای چوب بعدی  $18$  متر. کافی است مجموع  $5$  جمله اول دنباله

حسابی با  $a_1 = 6$  و  $d = 6$  را به دست آوریم:  $S_5 = \frac{5}{2}(12 + 4(6)) = 90 \text{ m}$

## پله چهارم: به دست آوردن دنباله از روی $S_n$

فرض کنید مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه  $S_n = 3n^2 - 4n$  به دست آید. می‌خواهیم از روی این دنباله، جمله عمومی

دنباله را بنویسیم. اگر  $n = 1$  قرار دهیم مجموع یک جمله ( $S_1$ ) یا همان  $a_1$  به دست می‌آید:

$$S_1 = a_1 = -1$$



اگر  $n = 2$  قرار دهیم مجموع دو جمله اول به دست می آید، یعنی:

$$S_2 = a_1 + a_2 = 2(2)^1 - 4(2) = 4$$

اگر  $a_1 = -1$  قرار دهیم  $a_2 = 5$  به دست می آید، حالا  $d = a_2 - a_1 = 6$ . با داشتن قدرنسبت و جمله اول، جمله عمومی نوشته می شود:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -1 + (n-1)(6) = 6n - 7$$

بنابراین از روی  $S_n$  هم می توانید خود دنباله و همه اطلاعات آن را بیابید. این را هم بگوییم که اگر در برنامه های پر بار تلویزیون دیدید، زیاد شگفت زده نشوید؛  $d$  همواره دو برابر ضریب  $n^2$  است. ضریب  $n^2$  برابر 3 بود، پس  $d = 6$  می شود.

راه حل دومی هم برای به دست آوردن  $a_n$  از روی  $S_n$  وجود دارد. اگر جمع اعداد از شماره 1 تا  $n$  را از جمع اعداد از شماره 1 تا  $n-1$  کم کنیم، جمله  $na_n$  یا  $a_n$  به دست می آید؛ یعنی  $S_n - S_{n-1} = a_n$ . پس:

$$S_n - S_{n-1} = 3n^2 - 4n - (3(n-1)^2 - 4(n-1)) = 3n^2 - 4n - (3n^2 - 10n + 7) = 6n - 7$$

(به جای  $n$  باید  $n-1$  بنویسیم)

### پله پنجم: یادآوری دنباله هندسی

دنباله  $3, 6, 12, 24, \dots$  را در نظر بگیرید. هر جمله در عدد ثابت 2 (همون قدرنسبت) ضرب شده و جمله بعدی به دست می آید. دنباله هایی که در آن ها، هر جمله در عدد ثابت  $q$  ضرب شده و جمله بعدی به دست می آید، دنباله های هندسی می نامیم. در هر دنباله هندسی، تقسیم هر جمله بر جمله قبلی همان قدرنسبت است؛ یعنی  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ .

جمله عمومی دنباله هندسی برای نوشتن جمله عمومی دنباله هندسی هم نیاز به دو چیز داریم: یکی جمله اول ( $a_1$ ) و دیگری قدرنسبت ( $q$ ). در این صورت جمله عمومی دنباله هندسی می شود:  $a_n = a_1 q^{n-1}$ ،  $(q, a_1 \neq 0)$ .

### مثال پاسخ

مثال: در یک دنباله هندسی با قدرنسبت مثبت، جمله هشتم و جمله چهارم به ترتیب برابر 81 و 9 هستند. جمله عمومی دنباله را به دست آورید.

پاسخ: اول باید  $a_1$  و  $q$  را به دست آوریم. دو معادله را نوشته و با حل دستگاه،  $a_1$  و  $q$  را به دست می آوریم. یادتان باشد دستگاه هایی که در این جا به وجود می آیند، معمولاً با تقسیم دو طرف حل می شوند.

$$\begin{aligned} a_8 = 81 &\Rightarrow a_1 q^7 = 81 \\ a_4 = 9 &\Rightarrow a_1 q^3 = 9 \end{aligned} \xrightarrow{\text{تقسیم}} \frac{a_1 q^7}{a_1 q^3} = \frac{81}{9} \Rightarrow q^4 = 9 \xrightarrow{q>0} q = \sqrt[4]{9} = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$a_1 (\sqrt{3})^3 = 9 \Rightarrow a_1 = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

با جای گذاری در معادله دوم داریم:

$$a_n = a_1 q^{n-1} = \sqrt{3} \times (\sqrt{3})^{n-1} = \sqrt{3}^n$$

پس جمله عمومی می شود:

### پله ششم: مجموع $n$ جمله اول دنباله هندسی

می خواهیم جمع  $n$  جمله اول دنباله هندسی با جمله اول  $a_1$  و قدرنسبت  $q$  را به دست آوریم. فعلاً فرض کنید  $q \neq 1$  باشد.

$$S = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}$$

$$\Rightarrow qS = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n$$

$$\Rightarrow S - qS = a_1 - a_1 q^n \quad (\text{از بالایی فقط اولی و از پایینی آخری می مونه})$$

$$\Rightarrow (1-q)S = a_1(1-q^n) \Rightarrow S = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

به خاطر بسپارید:

یکوقت به سرتان نزنند بنویسید  $\frac{a_1(1-q)^n}{1-q}$  (دیدم که می گم!)؛ توان  $n$  فقط برای  $q$  است.

ممکن است بپرسید اگر  $q = 1$  باشد چه می شود؟ ببینید اگر  $q = 1$  باشد، نتیجه می شود همه جمله ها، برابر هستند. مثلاً دنباله به صورت  $a, a, a, \dots$  بوده است. خب! چه کاری است جمع  $n$  جمله اول می شود  $na$  دیگر.

## مثال پاسخ

$$1, -2, 4, -8, \dots$$

مثال: مجموع ده جمله اول دنباله هندسی مقابل را بیابید.

$$S_{10} = \frac{a_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{1-(-2)^{10}}{1-(-2)} = \frac{1-1024}{3} = -341$$

پاسخ:  $a_1 = 1$  و  $q = -2$  پس:

یک وقت به سرتان نزنند بنویسید  $1 + (-2) + (-2)^2 + \dots$  (دیدم که می‌گم!) در ترتیب عملیات، توان جلوتر از جمع و تفریق است.

مثال: در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول برابر ۱۳۶ و مجموع شش جمله اول آن ۱۵۳ است. قدرنسبت دنباله را به دست آورید.

پاسخ: دو معادله را نوشته و با استفاده از فرمول  $S_n$  آن‌ها را باز می‌کنیم:

$$S_3 = 136 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 136$$

$$S_6 = 153 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 153$$

(گفتیم با تقسیم حل می‌شود)

$$\frac{1-q^6}{1-q^3} = \frac{153}{136} \Rightarrow \frac{1+q^3}{1-q^3} = \frac{153}{136} \Rightarrow \frac{1+q^3}{1-q^3} = \frac{153}{136}$$

(صورت آشنا می‌زنه با مزدوج)

$$\frac{(1+q^3)(1+q^3)}{1-q^3} = \frac{153}{136} \Rightarrow q^3 = \frac{153}{136} - 1 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

مثال: برای محافظت از تابش مواد زیان‌آور (نوشتم مُفید، باور کن طرف نمی‌دونسته، دیدم که می‌گم!) راديو اکتیویته، لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه استفاده کنیم تا شدت تابش مواد زیان‌آور ۹۹٪ کاهش یابد؟

پاسخ: بگذارید سؤال را این‌جوری بگویم. چه قدر از مواد زیان‌آور را دور بریزیم تا بیشتر از ۹۹٪ آن دور ریخته شود؟

اول  $\frac{1}{2}$  را دور می‌ریزیم. بعد از  $\frac{1}{2}$  باقی‌مانده،  $\frac{1}{4}$  آن را دور می‌ریزیم. پس  $\frac{1}{4}$  از کل حذف می‌شود. به همین ترتیب در مرحله  $n$   $(\frac{1}{2})^n$  حذف می‌گردد. مجموع مواد زیان‌آوری که دور ریختیم باید از ۹۹٪ بیشتر شود، پس:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + (\frac{1}{2})^n > \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} > \frac{99}{100} \Rightarrow 1 - \frac{99}{100} > (\frac{1}{2})^n \Rightarrow \frac{1}{100} > (\frac{1}{2})^n$$

مجموع  $n$  جمله اول  
دنباله هندسی با  $q = \frac{1}{2}$

یعنی حداقل باید از ۷ لایه، عبور بدهیم.  $100 < 2^n$  (با جستجو)  $\rightarrow 7 \leq n$  دو طرف را معکوس می‌کنیم

## پله هفتم: تعمیم (گسترش) اتحاد مزدوج و جاق و لاغر

اتحاد مزدوج و جاق و لاغر را که یادتان هست؟ داشتیم  $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$  و  $a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$  می‌خواهیم ببینیم اگر  $a^n - 1$  باشد، طرف راست به چه شکلی درمی‌آید. ببینید:

$$\underbrace{1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}}_{\text{مجموع } n \text{ جمله اول دنباله هندسی با } q=a} = \frac{1-a^n}{1-a} = \frac{a^n-1}{a-1} \Rightarrow a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + 1)$$

$$a^5 - 1 = (a-1)(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) \quad \text{یا} \quad a^7 - 1 = (a-1)(a^6 + a^5 + a^4 + \dots + 1)$$

مثلاً:

$$a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + a^{n-3} - \dots + 1)$$

نتیجه ۱ اگر  $n$  فرد باشد با تبدیل  $a$  به  $-a$  اتحاد به صورت مقابل درمی‌آید:

$$a^7 + 1 = (a+1)(a^6 - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$$

مثلاً:

نتیجه ۲ در حالت کلی نتیجه می شود:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$$

(از توان x یکی کم و به توان y یکی اضافه می شه)

$$x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$$

مثلاً

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots + y^{n-1})$$

شبهه نتیجه ۱ اگر n فرد باشد، با تبدیل y به -y داریم:

## سؤال های امتحانی

A

۱- گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۸

۴

الف) قدرنسبت جمله های ردیف زوج دنباله  $1, 3, 7, \dots$  برابر است با:

۶

۴

ب) اگر  $S_n = n^2 + n$  مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی باشد، جمله دوم دنباله برابر است با:

۲- جاهای خالی را با عبارت ها یا کلمه های مناسب پر کنید.

الف) در روز اول یک سکه، در روز دوم دو سکه، ... و در روز دهم، ده سکه کنار می گذاریم. در مجموع ..... سکه تا روز دهم کنار گذاشته ایم.

ب) ۱۰ نقطه متمایز روی محیط دایره ای قرار دارد. از هر نقطه به نقطه دیگر وصل می کنیم. تعداد ..... وتر به دست می آید.

۳- مجموع ۲۰ جمله اول هر یک از دنباله های حسابی زیر را بیابید.

(نهایی ۹۳)

الف)  $1, 3, 5, \dots$  (ب)  $5, 10, 15, \dots$  (نهایی ۹۱)

پ)  $a_n = 3n - 1$

ت)  $a_n = \frac{n}{2} + 1$

۴- چند جمله از دنباله  $1, 4, 7, 10, \dots$  را جمع کنیم تا حاصل برابر ۱۷۶ شود؟

(نهایی ۹۵)

۵- در دنباله حسابی  $1, 2, 5, \dots$  حداقل چند جمله آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۱۲۵ بیشتر شود؟

(نهایی ۹۳)

۶- حداقل چند جمله از دنباله  $3, 9, 15, \dots$  را جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیشتر شود؟

۷- در یک دنباله حسابی مجموع ۲۰ جمله اول، سه برابر مجموع ۱۲ جمله اول است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله اول دنباله را به دست آورید.

۸- در یک دنباله حسابی مجموع پنج جمله اول برابر ۱۰ و مجموع پنج جمله بعدی برابر ۳۵ است. مجموع پنجاه جمله اول دنباله را به دست آورید.

۹- در یک دنباله حسابی  $S_n = n(4n - 1)$  است.

الف) مجموع ده جمله اول را بیابید.

ب) مجموع  $a_6 + a_7 + \dots + a_{15}$  را بیابید.

پ) جمله عمومی دنباله را به دست آورید.

۱۰- از بین ۲۰ جمله اول دنباله حسابی  $1, -1, -4, -7, \dots$  مجموع جمله های ردیف زوج و مجموع جمله های ردیف فرد را به دست آورید.

۱۱- در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع جمله های ردیف فرد برابر ۵۳۰ و مجموع جمله های ردیف زوج برابر ۵۹۰ است. جمله اول و قدرنسبت دنباله را بیابید.

(مشابه کتاب درسی)

۱۲- حاصل جمع های زیر را به دست آورید.

(مشابه کتاب درسی)

الف) مجموع اعداد سه رقمی بخش پذیر بر ۶

ب) مجموع اعداد دورقمی که در تقسیم بر ۵ باقی مانده ای برابر ۲ دارند.

۱۳- تعدادی توپ و یک سبد مطابق شکل روی یک خط مستقیم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد ۲ m و فاصله بقیه توپ ها از یکدیگر ۳ m است. دونه ای از کنار سبد شروع کرده، هر توپ را برداشته و تا سبد برگشته و توپ را درون سبد می اندازد.

او این عمل را برای بقیه توپ ها هم انجام می دهد. اگر این دونه در مجموع ۳۷۴ متر دویده

باشد، چند توپ را درون سبد انداخته است؟

(مشابه کتاب درسی)

۱۴- گزینه صحیح را انتخاب کنید.

$\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

الف) قدرنسبت دنباله هندسی  $2\sqrt{2}, 1, \dots$  برابر است با .....

$\frac{1023}{2}$

$\frac{1023}{4}$

ب) مجموع ده جمله اول دنباله  $1, \frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \dots$  برابر است با .....

۱۰۲۳

۵۱۱

پ) مجموع  $2^9 + 2^8 + \dots + 2^2 + 2 + 1$  برابر است با .....

۱۵- مجموع ۱۰ جمله اول هر یک از دنباله‌های زیر را به دست آورید.

(الف)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$  (ب)  $2, \sqrt{2}, 1, \dots$  (پ)  $2, -6, 18, \dots$  (ت)  $a_n = \frac{2^{n-1}}{3}$

(توی ۹۰)

۱۶- مجموع چند جمله از دنباله هندسی  $6, -12, 24, \dots$  برابر ۱۲۶- است؟

۱۷- حداقل چند جمله از دنباله  $1, 3, 9, \dots$  را جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

۱۸- مجموع جمله‌های اول و سوم در یک دنباله هندسی برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن برابر ۳ است. مجموع شش جمله اول را بیابید.

۱۹- در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول برابر ۱۳۶ و مجموع سه جمله بعدی ۱۷ است. قدرنسبت دنباله را بیابید.

۲۰- مجموع ده جمله اول دنباله هندسی  $2, x, 6, \dots$  را بیابید. ( $q > 0$ )

۲۱- طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از قسمت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به همین ترتیب

(توی ۹۲)

در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹٪ سطح مربع رنگ می‌شود؟

۲۲- حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله  $2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$  را به دست آورید.

(توی ۹۱)

۲۳- به کمک اتحادها عبارت روبه‌رو را ساده کنید.  $A = \frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1}$

B

## سؤال‌های تکمیلی

۲۴- با استفاده از فرمول  $S_n$  و بار دیگر با استفاده از یک مربع  $n \times n$  نشان دهید:  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

۲۵- جمله ششم یک دنباله حسابی برابر ۱۰ است. مجموع یازده جمله اول دنباله را به دست آورید.

۲۶- در یک دنباله حسابی از جمله اول ۲ واحد کم و به قدرنسبت ۳ واحد اضافه می‌کنیم. مجموع ده جمله اول چه تغییری می‌کند؟

۲۷- بین دو عدد ۳ و ۴۷، تعداد ۱۰ واسطه حسابی قرار می‌دهیم. مجموع واسطه‌ها را به دست آورید.

۲۸- زوایای داخلی یک ۵ ضلعی محدب برحسب درجه، تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. اگر قدرنسبت  $6^\circ$  باشد، کوچک‌ترین زاویه ۵ ضلعی را به دست آورید.

۲۹- حاصل  $A = (1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$  را به ازای  $x = \sqrt{2}$  به دست آورید.

۳۰- بین دو عدد ۱۵۳۶ و ۳، هشت عدد طوری قرار می‌دهیم که اعداد تشکیل دنباله هندسی بدهند. مجموع این واسطه‌ها را به دست آورید.

۳۱- تویی را از ارتفاع ۵۰ متری رها می‌کنیم تا در یک مسیر مستقیم با زمین برخورد کند. بعد از هر بار برخورد توپ با زمین،  $\frac{1}{3}$  ارتفاع قبلی بالا می‌آید. وقتی توپ برای بار هفتم با زمین برخورد می‌کند، چه مسافتی را پیموده است؟

۳۲- اگر  $x = 2$  باشد، حاصل  $(x^3 - 1)(1 + x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-30})^{-1}$  را به دست آورید.

۳۳- ثابت کنید:  $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + y^{n-1})$

## سؤال‌های فضایی

C

۳۴- یک دنباله حسابی ۱۰۰ جمله دارد. اگر جمع سه جمله اول با سه جمله آخر برابر ۱۵۰ باشد، مجموع همه جمله‌ها چه قدر است؟

۳۵- در مسئله ۱۳ اگر دوتنه تا پایان زمان، ۹۰۰ m را طی کرده باشد، چند توپ را درون سبد انداخته است؟

۳۶- مقدار  $x$  را از معادله  $1 + 5 + 9 + \dots + x = 231$  به دست آورید.

۳۷- اعداد طبیعی را به صورت  $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8, 9\}, \dots$  دسته‌بندی می‌کنیم (یعنی آخرین جمله هر دسته، مربع کامل است). مجموع جمله‌های دسته یازدهم را به دست آورید.

۳۸-  $a_n$  یک دنباله حسابی است. حاصل  $S = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$  را بیابید.

۳۹- جمله‌های سوم، هفتم و نهم از یک دنباله حسابی غیر ثابت، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی هستند. مجموع چند جمله اول دنباله حسابی برابر صفر است؟



# سب امتحان

امتحان مشاوره درسی نامہ

راحت بخوابید! 



کھلی سبز



91786004123853


 [kheilisabz](#)

 [@kheilisabzpub](#)

به صفحه اینستاگرام و کانال تلگرامون سر بزنید تا در جریان اتفاق‌های باحال خیلی سبزی قرار بگیرید



۰۲۱-۶۳۵۶۴

 [porteghalpub](#)

[www.porteghaal.com](http://www.porteghaal.com)



بهترین کتاب‌های جهان برای بچه‌های ایران